- En los problemas que emplean situaciones aditivas – multiplicativas, la mayoría de los niños utilizan para su solución procedimientos aditivos que incluyen la suma de muchos sumandos lo que dificulta el control de las respuestas correctas.
- Del análisis de los procesos utilizados por algunos niños se puede concluir que en este nivel están consolidando su esquema aditivo y a la vez su pensamiento está iniciando procesos comprensivos del esquema multiplicativo.

Finalmente los objetivos formulados excepto el tercero se lograron a satisfacción del grupo de investigadores.

Referencias Bibliográficas

BAROODY, J. Arthur. El pensamiento matemático de los niños. Visor Dis., S.A. Madrid, España, 2000.

BRUNER, J. Acción, pensamiento y lenguaje. Fondo de cultura económica. México.

1984.

CAMPBELL y STA N LEY. Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la Investigación Social. Amorrortu Editores. Buenos Aires, Argentina, 1980.

DELVAL, J. La inteligencia: su crecimiento y medida. Salvat, Barcelona, 1985.

GASTON, M. Las Matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan. Pablo del Río, Madrid, 1977.

MESA, B. Criando. Criterios y Estrategias para la enseñanza de las Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, Santafe de Bogotá, 1997.

PIAGET, Jean. Psicología y pedagogía. Ariel. Barcelona. 1979.

VYGOTSKY, L.S. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. 1979.

Requerimientos matemáticos para los diseños didácticos. La formulación de una relación matemática[1]

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

OLGA LUCÍA LEÓN CORREDOR[2]

Resumen

Este Taller realiza una profundización sobre las características que determinan la formulación de una relación matemática como la pitagórica y los factores que inciden en el paso de la formulación de la relación hasta la construcción de un teorema en un contexto argumentativo. Bajo el enunciado “teorema de Pitágoras” se globalizan una serie de resultados que a pesar de tener la misma nominación hacen referencia a diferentes aspectos conceptuales en las matemáticas, sin estar todos bajo el mismo estatus de teorema.

Cuatro aspectos interesan en este caso: La caracterización de la relación pitagórica; los sentidos desarrollados según los contextos matemáticos; las condiciones para su formulación como ejemplo, como definición, como conjetura y como teorema y finalmente, el lugar de la figura en la constitución de los argumentos demostrativos del enunciado “Teorema de Pitágoras”. Por la duración del taller se profundizará en los dos primeros aspectos.

Sobre la metodología

La estrategia *taller* permite analizar aspectos teóricos y metodológicos asociados al requerimiento matemático de los diseños didácticos, que se orientan hacia la formulación de relaciones matemáticas. El taller “opera bajo los criterios de **aplicación** del conocimiento previo y de **verificación** de los resultados obtenidos en la aplicación” (León, 2005), por esta razón, se espera un conocimiento previo por parte de los asistentes al taller sobre la relación pitagórica y sobre diseños didácticos.

Referentes teóricos del taller

El ejercicio de caracterizar una relación matemática pasa por el reconocimiento de dos elementos: el nivel de generalidad que se le asigna a este térmi-

[1]Los aspectos teóricos de este taller hacen parte del tercer capítulo de la Tesis Doctoral: “La experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría”, presentada por la autora al Doctorado en Educación de la Universidad del Valle,

[2]Miembro del Grupo interdisciplinario en pedagogía del lenguaje y las matemáticas. Universidad Distrital-Universidad del Valle.

no y la importancia que se le asigna a la formulación de una relación en la elaboración de conocimiento. Estos elementos hacen compleja y necesaria la caracterización de una relación en particular para la didáctica de las ciencias:

> El conocimiento consiste en gran medida en establecer relaciones y en organizarlas en sistemas. Hay relaciones entre objetos en el espacio, entre cantidades físicas, entre fenómenos biológicos, sociales y psicológicos. (Vergnaud, 1995: 15)

La relación se constituye en uno de los principios básicos de toda conceptualización (no sólo de la conceptualización en matemáticas), el cual, al ser aplicado a dos o más elementos de uno o varios conjuntos, capta o genera cierto vínculo, nexo o correspondencia entre ellos, produciendo una proposición acerca de ellos. En este sentido, "relación" suele utilizarse como sinónimo de "vínculo", "nexo" o "correspondencia", y no puede definirse en la forma usual de acudir a un género y precisar una diferencia específica sin usar explícitamente uno o varios de sus sinónimos o, al menos, sin aludir implícitamente a ellos:

> Aristóteles se limitó a decir que una relación era un tipo de ser muy particular, "un ser hacia", es decir, "un ser orientado a." Así, la persona que no entienda ya al menos una de las expresiones "relación", "vínculo", "nexo", "correspondencia", "hacia", "orientado a" o similares, no puede entender qué es lo que se trata de definir. (Vasco 2005)

La relación se constituye en un elemento básico tanto desde la perspectiva cognitiva como desde la perspectiva matemática. Desde la matemática se considera que el desarrollo de la misma proporciona redes conectadas de reglas formales conceptos y sistemas. "Vemos la matemática como una red fuertemente elaborada de conexiones de sistemas formales, sistemas axiomáticos, reglas y conexiones" (Mac Lane, 1986:417), conexiones que se pueden establecer entre actividades humanas como: contar, medir mover; entre fenómenos: multitud (lo que puede ser contado), extensión (lo que puede ser medido); entre campos de conocimiento: geometría-arquitectura, cálculo-economía; entre campos de la matemáticas: Análisis, Geometría, Álgebra. Estos componentes de las redes que generan las ramas se expresan en términos de un principio básicos de toda conceptualización: el elemento, el conjunto, la propiedad, la relación y la operación. La dificultad de definir cualquiera de estos términos y la circularidad inevitable en las descripciones que se propongan para elucidarlos es una muestra del carácter básico y profundo de estos cinco principios.

En un sentido global de relación, la proposición "La suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa [del mismo]" enuncia una relación geométrica entre áreas de figuras, que llamamos "la relación pitagórica". Formulada así: "La suma de los cuadrados sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado sobre la hipotenusa [del mismo]" parece enunciar una relación geométrica entre figuras. Reformulada así: "La suma de los cuadrados de los dos primeros números naturales de una terna o tripla de números es igual al cuadrado del tercero," enunciaría una relación aritmética entre números naturales. Esta relación aritmética no se cumple para todas las ternas o triplas. En algunas se cumple, como en la terna (3, 4, 5), pero en otras no, como en la terna (4, 5, 6). Si llamamos "ternas pitagóricas" o "ternas rectángulas" a aquéllas en las que sí se cumple, tendríamos otra relación pitagórica, ya no de la geometría, sino de la aritmética, que llamaremos "la relación aritmética pitagórica": "La suma de los cuadrados de los dos primeros números naturales de una terna o tripla rectángula de números es igual al cuadrado del tercero."

En forma semejante, podemos eliminar la palabra "rectángulo" de la relación geométrica pitagórica particular, y nos quedaría una relación más general así: "La suma de las áreas de los cuadrados sobre dos lados de un triángulo es igual al área del cuadrado sobre el tercer lado [del mismo]." Esta relación geométrica pitagórica general ya no se cumple para todos los triángulos. Podríamos llamar a los triángulos para los que sí se cumpla "triángulos pitagóricos" o "triángulos rectángulos"; tendríamos así una manera de definir "triángulos rectángulos" sin necesidad de aludir al ángulo recto entre los catetos (veáse la Prop. I.48 de los Elementos de Euclides). Esa era la manera como los agrimensores sumerios, egipcios e hindúes (y seguramente de otras etnias) ataban nudos en cuerdas a distancias iguales para lograr un ángulo recto. Esta relación geométrica pitagórica más general ya no es una conjetura ni un teorema. Es simplemente una relación que no es trivial, en el sentido de que hay triángulos que la cumplen y otros que no.

Si la reformulamos como una relación entre las longitudes de los lados de los triángulos rectángulos, medidas con cualquier unidad, diríamos así: "La suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo elevadas al cuadrado es igual a la longitud del tercer lado elevada al cuadrado." Esta sería una relación aritmética pitagórica, ya no entre ternas de números de la aritmética natural, sino de la aritmética de los números reales positivos (o en la de los números algebraicos reales y positivos).

No toda terna de números reales positivos la cumple, pero si el tercer número de la terna es la raíz cuadrada de la suma de los dos primeros, esa terna sí la cumplirá. El hecho de que esa terna siempre defina las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo es lo que liga la relación aritmética pitagórica con la relación geométrica pitagórica particular; por ello, amerita la demostración de un teorema específico al respecto.

Se destacan tres sentidos para la relación pitagórica (RP) privilegiando para ello el componente **contenido** del sentido, de ahí que se hable de sentido aritmético, sentido geométrico, y sentido aritmo-geométrico. Cada uno de estos sentidos será objeto de profundización en el desarrollo del taller.

Bibliografía

HEATH, T. L., (1956). The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, New York: Dover.

LEON, O.L. (2005). La formulación de la relación pitagórica: El contexto euclidiano y la estructura multiregistro. En: "La experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría". Tesis Doctoral. Cali: Universidad del Valle, Doctorado en Educación.

MAC LANE, S. (1986). Mathematics form and function. New York: Springer-Verlag.

VERGNAUD, G (1995). El niño las matemáticas y la realidad. México: Trillas.

VASCO, C. E. (2005). Notas Seminario Doctoral. Bogotá: Universidad Distrital.

Aspectos históricos y psicológicos de la multiplicación[1]

LUIS ORIOL MORA V.
JAIME HUMBERTO ROMERO C.
PEDRO JAVIER ROJAS G.
JORGE RODRÍGUEZ B.
EUGENIA CASTILLO E.
MARTHA BONILLA E.
NEILA SÁNCHEZ H

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Introducción

En este taller, a partir de un acercamiento histórico a la multiplicación en las culturas egipcia, mesopotámica y griega, se presenta algunas evidencias de procedimientos matemáticos desde los que puede ser comprendida la complejidad de la multiplicación. Por otra parte, acudiendo a la teoría de la intuición (Fischbein, 1987) y de los modelos intuitivos (Fischbein et al., 1985) se muestra cómo una enseñanza de la multiplicación que la restrinja a suma reiterada, por lo tanto reducida sólo a la matematización de grupos iguales; a la memorización, generalmente asociada a una generalización de uno más, de las tablas de multiplicar; y al uso de sus algoritmos de cálculo, hoy canónicos, desestimula el aprendizaje e impide el desarrollo del pensamiento matemático complejo en los niños.

Aspectos históricos

En algunos libros de historia de las matemáticas (Boyer, 1992; Klein, 1992), la información acerca de las matemáticas en las culturas egipcia, mesopotámica y griega es organizada de manera similar. Realizan, grosso modo, una ubicación geográfica de la cultura en mención, describen relaciones socio-políticas de cada una de ellas, comentan las fuentes documentales de que disponían, y presentan la matemática, más o menos, en el siguiente orden: sistemas de numeración, operaciones aritméticas, problemas algebraicos, problemas geométricos.

Las culturas mesopotámica y griega tenían sistemas de numeración básicos y posicionales, y algoritmos para cálculos en lo multiplicativo. En general, salvo de la matemática egipcia, en los textos no se encuentra información sobre técnicas de cálculo en lo aditivo. Sin embargo, por el gran desarrollo de bases y algoritmos, se intuye que estas culturas crearon métodos rápidos para sumar. Cada una de estas culturas generó procesos propios para

[1]Este trabajo ha sido producido por los autores en el marco de la investigación "Pensamiento Multiplicativo: Una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula" financiada por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, COLCIENCIAS y el IDEP.